

1. Determine $\alpha(C_n)$, $\beta(C_n)$, $\alpha'(C_n)$ y $\beta'(C_n)$.

Demostración. Finalmente no habrá diferencia entre los valores si n es par o impar pero para conveniencia de la demostración lo probaremos por separado.

Si $n = 2k$ recordemos que los ciclos de cardinalidad par son gráficas bipartitas, más aún, que si $C = \{v_1, v_2, v_3 \cdots v_{2k} = v_1\}$ la partición es de la forma $I = \{v_2, v_4, \dots, v_{2k}\}$ y $I' = \{v_1, v_3, \dots, v_{2k-1}\}$ y que en una gráfica bipartita el número de independencia es la cardinalidad de la parte más grande, en este caso $|I| = |I'| = \frac{n}{2} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Más aún recordemos que $\alpha(C_n) + \beta(C_n) = n$ de esta manera $n = \alpha(C_n) + \beta(C_n) = \frac{n}{2} + \beta(C_n)$ por lo que $\beta(C_n) = \frac{n}{2} = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Además el teorema de König nos asegura que $\alpha'(C_n) = \beta(C_n) = \frac{n}{2} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; finalmente también sabemos que $\alpha'(C_n) + \beta'(C_n) = n$ ya que no hay vértices aislados, (Teorema de Gallai que no probamos pero es el dual al que si probamos), por lo tanto $n = \alpha'(C_n) + \beta'(C_n) = \frac{n}{2} + \beta'(C_n)$ por lo que $\beta'(C_n) = \frac{n}{2} = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

$$\therefore \alpha(C_n) = \alpha'(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor.$$

Y

$$\beta(C_n) = \beta'(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$$

Si $n = 2k - 1$. Sea $C = \{v_1, v_2, v_3 \cdots v_{2k-1} = v_1\}$ definamos $I := \{v_2, v_4, \dots, v_{2k}\}$ este es claramente un conjunto independiente (ya que las aristas solo pueden tener la forma $v_{2j}v_{2j+1}$) también veamos que $|I| = \frac{(2k-1)-1}{2} = \frac{n-1}{2} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

De nuevo utilizando el teorema de Gallai tenemos que $n = \alpha(C_n) + \beta(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \beta(C_n)$ por lo que $\beta(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Finalicemos definiendo $M := \{a \in A(C_n) : a = v_{2j}v_{2j+1}\}$ que es un apareamiento ya que dos aristas de M no pueden ser adyacentes al ser un ciclo, veamos también que cualquier otro conjunto de aristas tendrá al menos un par de aristas de la forma $v_{2j}v_{2j+1}, v_{2j+1}v_{2(j+1)}$ o $v_{2k}v_{2k+1}, v_{2k+1}v_1$ es decir tendrá aristas adyacentes por lo que M es un apareamiento de cardinalidad máxima y $\alpha'(C_n) = |M| = \frac{(2k-1)-1}{2} = \frac{n-1}{2} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Por último por el mismo argumento del teorema de Gallai $\beta'(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, de nuevo al no haber vértices aislados.

$$\alpha(C_n) = \alpha'(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$$

Y

$$\beta(C_n) = \beta'(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$$

En cualquier caso

$$\alpha(C_n) = \alpha'(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$$

$$\beta(C_n) = \beta'(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$$

□

2. Determine $\alpha(Q_n)$, $\beta(Q_n)$, $\alpha'(Q_n)$ y $\beta'(Q_n)$

Demostración. Empecemos probando que el n -cubo es una gráfica bipartita con partes definidas recursivamente

$$\begin{cases} I_k = \{v_1\} & \text{si } k = 1 \\ I'_k = \{v_2\} & \text{si } k = 1 \\ I_{k+1} = \{(v, v_1) : v \in I_k\} \cup \{(v, v_2) : v \in I'_k\} \\ I'_{k+1} = \{(v, v_2) : v \in I_k\} \cup \{(v, v_1) : v \in I'_k\} \end{cases}$$

De los conjuntos así definidos afirmamos tres cosas primero que I_k, I'_k son una bipartición de los vértices de Q_k , que $|I_k| = |I'_k| = 2^{k-1}$ y que son conjuntos independientes máximos respecto a la cardinalidad. Procederemos por inducción sobre k .

Si $k = 1$

- a) Es claro que I_1, I'_1 son independientes, al ser unitarios y que forman una partición de $V(Q_1)$.
- b) $|I_1| = |I'_1| = |\{v_1\}| = 1 = 2^0 = 2^{k-1}$.
- c) De nuevo es claro ya que el único conjunto con más elementos sería $V(Q_1)$ que no es independiente.

Si $k = m + 1$

- a) Sean $v, w \in I_{m+1}$, si $v, w \in \{(v, v_1) : v \in I_m\}$. Sean $v = (v_v, v_1)$ y $w = (v_w, v_1)$ entonces v, w no pueden ser adyacentes ya que de serlo tendríamos que v_v, v_w tendrían que ser adyacentes lo que contradice que I_m es independiente. Si $v \in \{(v, v_1) : v \in I_m\}$ y $w \in \{(v, v_2) : v \in I'_m\}$ notemos que v, w no pueden ser adyacentes al ser diferentes la primera coordenada por estar en elementos distintos de la partición y la segunda coordenada por definición. Los casos $v, w \in \{(v, v_2) : v \in I'_m\}$ y $v \in \{(v, v_2) : v \in I'_m\}$ y $w \in \{(v, v_1) : v \in I_m\}$ son análogos.
- b) $|I_{m+1}| = |\{(v, v_1) : v \in I_m\} \cup \{(v, v_2) : v \in I'_m\}| = |\{(v, v_1) : v \in I_m\}| + |\{(v, v_2) : v \in I'_m\}| = 2^{m-1} + 2^{m-1} = 2(2^{m-1}) = 2^m = 2^{(m+1)-1}$ análogamente $|I'_{m+1}| = 2^{(m+1)-1}$.
- c) Notemos que por como definimos I_{m+1} y I'_{m+1} para cualquier conjunto con más elementos este tendrá que tener vértices que compartan su segunda coordenada y sean adyacentes en Q_m es decir vértices adyacentes en Q_{m+1} por lo que dejaría de ser independiente.

Así por inducción podemos afirmar que para cualquier $k \in \mathbb{Z}^+$ I_k, I'_k son una bipartición de los vértices de Q_k , que $|I_k| = |I'_k| = 2^{k-1}$ y que son conjuntos independientes máximos respecto a la cardinalidad.

Finalmente solo basta observar que Q_n no tiene vértices aislados y que $|V(Q_n)| = 2^n$ dado todo esto utilicemos que $\alpha(Q_n)$ es el cardinal de la parte más grande, en este caso ambas partes tienen el mismo cardinal $|2^{n-1}|$ por teorema de Gallai para vértices $\alpha(Q_n) + \beta(Q_n) = 2^{n-1} + \beta(Q_n) = |V(Q_n)| = 2^n = 2(2^{n-1}) = 2^{n-1} + 2^{n-1}$ por lo que $\beta(Q_n) = 2^{n-1}$.

De nuevo por el teorema de König $\alpha'(Q_n) = \beta(Q_n) = 2^{n-1}$ y por el teorema de Gallai para aristas $\beta'(Q_n) = 2^{n-1}$. $\square$

1.6 Demuestra.

- a) Para cualesquiera $k, l \in \mathbb{Z}^+$, $r(k, l) = r(l, k)$.
- b) Para cualesquiera $k, l \in \mathbb{Z}^+$, $r(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$.

Demostración. a) Sea G una gráfica de orden $r(k, l)$. Si G tiene un clan de cardinalidad k , entonces G^c tiene un conjunto independiente de cardinalidad k , por lo que $r(l, k) \leq r(k, l)$. Por otro lado, si G tiene un conjunto independiente de cardinalidad l , entonces G^c tiene un clan de cardinalidad l , por lo que nuevamente $r(l, k) \leq r(k, l)$.

En cualquiera de los dos casos se tiene $r(l, k) \leq r(k, l)$. Análogamente, $r(k, l) \leq r(l, k)$. Por lo tanto, $r(k, l) = r(l, k)$.

- b) Procedemos por inducción sobre $k + l$.

Sean $k, l \in \mathbb{Z}^+$ tales que $k + l = 2$. Entonces necesariamente $k = l = 1$. Probamos en clase que

$$r(1, 1) = 1 = \binom{0}{0} = \binom{2-2}{1-1} = \binom{k+l-2}{k-1}.$$

En particular, $r(1, 1) \leq \binom{k+l-2}{k-1}$.

Supongamos ahora que para todo par de enteros positivos cuya suma es m se cumple

$$r(k, l) \leq \binom{k+l-2}{k-1}.$$

Consideremos $k, l \in \mathbb{Z}^+$ tales que $k + l = m + 1$. Probamos anteriormente que

$$r(k, l) \leq r(k-1, l) + r(k, l-1).$$

Como $(k-1) + l = m$, por hipótesis de inducción

$$r(k-1, l) \leq \binom{(k-1)+l-2}{(k-1)-1} = \binom{k+l-3}{k-2}.$$

Análogamente,

$$r(k, l-1) \leq \binom{k+l-3}{k-1}.$$

Por lo tanto,

$$r(k, l) \leq r(k-1, l) + r(k, l-1) \leq \binom{k+l-3}{k-2} + \binom{k+l-3}{k-1} = \binom{k+l-2}{k-1},$$

donde la última igualdad es la identidad de Pascal.

□

3. Demuestra que

$$|A(T_{n,r})| = \max\{|A(G)| : G \text{ es una gráfica } r\text{-partita completa de orden } n\}.$$

Demostración. Notemos primero que

$$T_{n,r} \in \{G : G \text{ es una gráfica } r\text{-partita completa de orden } n\}.$$

Sea ahora G una gráfica r -partita completa de orden n . Por el principio del palomar, G no puede tener clanes de cardinalidad $r+1$, ya que en tal caso dos vértices del clan pertenecerían a la misma parte, lo cual contradice que cada parte sea independiente.

Por el primer teorema de Turán se tiene que

$$|A(G)| \leq |A(T_{n,r})|.$$

Como G fue una gráfica arbitraria r -partita completa de orden n , se sigue que para toda gráfica en

$$\{G : G \text{ es una gráfica } r\text{-partita completa de orden } n\}$$

se cumple

$$|A(G)| \leq |A(T_{n,r})|.$$

Por lo tanto, $|A(T_{n,r})|$ es una cota superior del conjunto

$$\{|A(G)| : G \text{ es una gráfica } r\text{-partita completa de orden } n\},$$

el cual es finito, y además este valor pertenece al conjunto. Concluimos que

$$|A(T_{n,r})| = \max\{|A(G)| : G \text{ es una gráfica } r\text{-partita completa de orden } n\}.$$

□

4. Demuestra que para toda gráfica G se tiene

$$\chi(G) \geq \frac{n^2}{n^2 - 2m},$$

donde $\chi(G)$ es el número cromático de G .

Demostración. Notemos que G no puede tener clanes de cardinalidad $\chi(G) + 1$, ya que de tenerlos el número cromático sería al menos $\chi(G) + 1$. Por el segundo teorema de Turán se tiene

$$m \leq \left(1 - \frac{1}{\chi(G)}\right) \frac{n^2}{2}.$$

Despejando $\chi(G)$ obtenemos

$$2m \leq \left(1 - \frac{1}{\chi(G)}\right) n^2.$$

Entonces

$$\frac{2m}{n^2} \leq 1 - \frac{1}{\chi(G)}.$$

Por tanto,

$$\frac{1}{\chi(G)} \leq 1 - \frac{2m}{n^2} = \frac{n^2 - 2m}{n^2}.$$

Finalmente,

$$\frac{1}{\chi(G)} \leq \frac{n^2 - 2m}{n^2}.$$

Por lo que

$$\chi(G) \geq \frac{n^2}{n^2 - 2m}.$$

□